

Решение экономических задач на проценты при подготовке к ЕГЭ и ОГЭ по математике.

Социально-экономические преобразования в стране привели к изменению уровня жизни людей, что повлекло необходимость адаптации личности к современным рыночным условиям, подготовки грамотных специалистов в различных областях, занимающих активную позицию в решении своих профессиональных задач. Это повлекло за собой возникновение проблемы поиска эффективного решения задач повышения качества экономического образования учащихся как одного из ведущих направлений совершенствования российского образования, отраженной во всех нормативно-правовых документах. В Федеральном государственном образовательном стандарте общего образования сказано, что одним из главных результатов освоения общего образования является метапредметный результат: «освоение способов деятельности, применимых как в рамках образовательного процесса, так и при решении проблем в реальных жизненных ситуациях». В контексте решения проблемы экономического образования школьников речь идет о первом уровне - экономической подготовке всех учащихся, где перед учителем встает задача передачи им базовых знаний о личной, семейной экономике, подготовки к производственно-экономической деятельности в условиях разных видов собственности, многообразия форм организации труда, ознакомления с основами социально-экономической защиты молодежи в условиях формирующихся рыночных отношений, т.е. формирования основы для подготовки поколения, способного к жизненному и профессиональному самоопределению в условиях рыночных отношений. Однако само по себе наличие базовых экономических знаний не является залогом формирования экономически грамотной личности. Только активная позиция школьников в процессе экономического образования дает возможность выбора каждому учащемуся индивидуальной траектории своего развития, области для самореализации, что обеспечивается прочными экономическими знаниями, умениями и навыками и обуславливает полноценную жизнедеятельность в современных рыночных условиях. Особую роль в решении этой задачи призвана решать математика, в курсе которой поэтапно формируется финансовая грамотность или, проще говоря, умение рационально распоряжаться финансами.

Финансовая грамотность — это совокупность знаний, навыков и установок в сфере **финансового** поведения человека, ведущих к улучшению благосостояния и повышению качества жизни

Основные направления изучения финансовой грамотности в школе:

- рациональное использование денежных ресурсов на потребление;
- культура сбережения с целью формирования активов;
- эффективное использование денежных ресурсов для инвестирования.

Решение различных типов экономических задач ЕГЭ

Задачи на проценты.

1) Вклад планируется открыть на 4 года. Первоначальный вклад составляет целое число миллионов рублей. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, и, кроме того, в начале третьего и четвертого года вклад пополняется ежегодно на 3 млн. рублей. Найти наибольший размер первоначального вклада, при котором через четыре года вклад будет меньше 25 млн. рублей.

Решение: Рассмотрим все четыре года на начало и на конец.

Пусть X млн. рублей взяли, тогда

	начало года	конец года
1год	x	$1,1x$
2год	$1,1x$	$1,21x$
3год	$1,21x+3$	$(1,21x+3)*1,1=1,331x+3,3$
4год	$1,331x+6,3$	$(1,331x+6,3)*1,1=1,4641x+6,93$

По условию задачи составим уравнение:

$$1,4641x+6,93<25$$

$$1,4641x < 18,07$$

$$X < 12,34$$

Так как вклад составляет целое число млн. рублей, то сумма равна 12 млн. рублей.

Ответ: 12млн. рублей.

2) В начале 2001 года Алексей приобрел ценную бумагу за 11000 рублей. В конце каждого года цена бумаги возрастает на 4000 рублей. В начале любого года Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счет. Каждый год сумма на счете будет увеличиваться на 10%. В начале какого года Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через пятнадцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счете была наибольшей?

Решение: Рассмотрим каждый год отдельно на начало и на конец и выяснить, когда 10% будут больше, чем 4000р. Это и будет нужный год.

	начало года	конец года	10%
2001г.	11000	15000	1500
2002г.	15000	19000	1900
2003	19000	23000	2300
2004	23000	27000	2700
2005	27000	31000	3100
2006	31000	35000	3500
2007	35000	39000	3900
2008	39000	43000	4300>4000
2009	43000		

Так как 10% больше, чем 4000р., то в начале 2009 года Алексей должен продать ценную бумагу и положить в банк под 10% годовых.

Ответ: в начале 2009 года.

3) 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 9282000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Алексей переводит в банк X рублей. Какова должна быть сумма X, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Решение: Пусть сумма выплат будет X. Рассмотрим четыре года.

31 декабря 2014г.	9282000р.
31 декабря 2015г.	$9282000 * 1,1 - X = 10210200 - X$
31 декабря 2016г.	$(10210200 - X) * 1,1 - X$
31 декабря 2017г.	$((10210200 - X) * 1,1 - X) * 1,1 - X = 0$

$$13589776,2 - 4,641X = 0$$
$$X = 2928200 \text{ рублей.}$$

Ответ: 2928200р.

Для самостоятельного решения: 31 декабря 2014 года Михаил взял в банке некоторую сумму в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Михаил переводит в банк 2928200 рублей. Какую сумму взял Михаил в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)? Ответ: 9282000р.

Задачи на вклады

1) 15-го января Вика планирует взять в банке кредит сроком на шесть месяцев в размере 1 млн. рублей. Условия его возврата следующие:

-1-го числа каждого месяца долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца, где r –целое число.;

-выплата должна производиться один раз в месяц со 2-го по 14-е число каждого месяца;

-15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей:

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (млн.рублей)	1	0,8	0,4	0,35	0,2	0,15	0

Найдите наименьшее значение r , при котором Вике в общей сумме придется выплатить меньше 1,6 млн. рублей.

Решение: Пусть $k=1+1 \cdot r/100$, то есть сумма + проценты, S выплачиваемая сумма, тогда согласно схеме, имеем:

$$S(1)=1 \cdot k-0,8$$

$$S(2)=0,8 \cdot k-0,4$$

$$S(3)=0,4 \cdot k-0,35$$

$$S(4)=0,35 \cdot k-0,2$$

$$S(5)=0,2 \cdot k-0,15$$

$$S(6)=0,15 \cdot k-0$$

Так как все выплаты меньше, чем 1,6 млн. рублей, то имеем:

$$1 \cdot k - 0,8 + 0,8 \cdot k - 0,4 + 0,4 \cdot k - 0,35 + 0,35 \cdot k - 0,2 + 0,2 \cdot k - 0,15 + 0,15 \cdot k - 0 < 1,6$$

$$2,9 \cdot k < 3,5$$

$$k < 35/29, \text{ подставим вместо } k = 1 + 1 \cdot r/100$$

$$1 + r/100 < 35/29,$$

$$r < 20,6, \text{ следовательно } r = 20.$$

Ответ: 20

Для самостоятельного решения: В июле Глеб планирует взять кредит в банке на три года в размере S млн. рублей, где S целое число. Условия его возврата следующие:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- выплата должна производиться один раз в год с февраля по июнь;
- в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Дата	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (млн.рублей)	S	$0,75S$	$0,5S$	0

Найдите наибольшее значение S , при котором каждая из выплат Глеба будет меньше 4 млн. рублей.

Ответ: 6

2) 15 января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего месяца, где r — целое число.;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

-15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r .

Решение: Пусть S планируемая сумма кредита, $k=1+1 \cdot r/100$, разделим кредит на 19 частей согласно условию .

$19S/19, 18S/19, 17S/19, 16S/19, 15S/19, 14S/19, 13S/19, \dots, 1S/19$

При этом выплаты составят: $Sk - 18S/19, 18Sk/19 - 17S/19, 17Sk/19 - 16S/19,$

$16Sk/19 - 15S/19$ и т.д. $Sk/19$, по условию задачи сумма всех выплат на 30% больше первоначальной суммы, то есть:

$(Sk - 18S/19 + 18Sk/19 - 17S/19 + 17Sk/19 - 16S/19 + 16Sk/19 - 15S/19 + \dots + Sk/19) -$

$(19S/19 + 18S/19 + 17S/19 + 16S/19 + 15S/19 + 14S/19 + 13S/19 + \dots + 1S/19) - S = 0,3S$

$10k = 10,3$

$10 \cdot (1 + 1 \cdot r/100) = 10,3$

$r = 3$ Ответ: 3

Для самостоятельного решения: 1) 15 января планируется взять кредит в банке на сумму 1,8 млн. рублей 24 месяца. Условия его возврата таковы:

-1-го числа каждого месяца долг увеличивается на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;

- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

-15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.

Какую сумму нужно вернуть банку в течение первого года кредитования?

Ответ: 1233000 рублей.

2) В июле планируется взять кредит в банке на сумму 16 млн. рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

-каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

-с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

-в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года. На сколько лет планируется взять кредит, если известно, что общая сумма выплат после его полного погашения составит 38 млн рублей. Ответ: 10 лет.

Решение различных типов экономических задач ОГЭ

1. Простейшие задачи на проценты

Пример 1

Только 71% из 27000 выпускников города правильно решили задачу 1. Сколько человек правильно решили задачу 1.

Решение.

1-й способ

Задачу решили $\frac{71}{100} \cdot 27000 = \frac{71}{100} \cdot 27000 = 19170$.

2-й способ

Примем 27000 выпускников за 100%. Тогда x выпускников, решивших задачу 1, составляет 71%.

Составим пропорцию $\frac{27000}{x} = \frac{100 \cdot 27000}{71 \cdot x} = \frac{100}{71}$, из которой найдем $x = \frac{27000 \cdot 71}{100} = \frac{27000 \cdot 71}{100} = 19170$

Ответ: 19170 человек.

Пример 2.

Призерами городской олимпиады по математике стало 68 учеников, что составило 20% от числа участников. Сколько человек участвовало в олимпиаде?

Решение.

1-й способ.

Пусть в олимпиаде участвовали x человек. Тогда согласно условию задачи составим уравнение

$$\frac{20}{100} \cdot x = 68 \quad \frac{20}{100} \cdot x = 68 \quad \left| x = \frac{6800}{20} = 340 \right| \quad x = \frac{6800}{20} = 340$$

2-й способ.

Примем x учеников, принявших участие в олимпиаде, за 100%. Тогда 68 призеров олимпиады составляют 20%. Составим пропорцию $\frac{x}{68} = \frac{100}{20} = \frac{100}{20}$, откуда найдем

$$x = \frac{68 \cdot 100}{20} = 340 \quad x = \frac{68 \cdot 100}{20} = 340$$

Ответ: 340 человек.

2. Пропорциональное деление величины

Пример 1.

Митя, Артем, Паша и Женя учредили компанию с уставным капиталом 200000 рублей. Митя внес 18% уставного капитала, Артем — 60000 рублей, Паша — 0,18 уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внес Женя. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесенному в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 1100000 рублей причитается Жене?

Ответ дайте в рублях.

Решение:

Митя внес 18% уставного капитала, Артем $\frac{60000}{200000} \cdot 100\% = 30\%$ уставного капитала, Паша-0,18 $\cdot 100\% = 18\%$ уставного капитала. Тогда Женя внес $100\% - 18\% - 30\% - 18\% = 34\%$ уставного капитала. Из прибыли размером в 1100000 рублей Женя получит $0,34 \cdot 1100000 = 374000$ рублей.

Ответ: 374 000 рублей.

Пример 2.

Три фирмы затратили на выполнение работы 740 000 рублей. Этот расход они распределили так, что каждый внес сумму денег, обратно пропорциональную расстоянию его места объекта до работы. Первая фирма расположена в 4 км, вторая – в 5 км и третья – в 6 км от объекта. Сколько рублей должна уплатить за работу каждая фирма?

Решение:

1 1 1

$\overline{4}, \overline{5}, \overline{6}$

Фирма должна разделить затраты прямо пропорционально числам $\overline{4}, \overline{5}, \overline{6}$. По свойству отношений

имеем: $\frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6} = (60 : \frac{1}{4}) : (60 : \frac{1}{5}) : (60 : \frac{1}{6}) = 15 : 12 : 10$.

Первая фирма должна уплатить

$$\frac{15}{15+12+10} \cdot 740\,000 = 300\,000 \text{ рублей};$$

вторая фирма должна уплатить

$$\frac{12}{15+12+10} \cdot 740\,000 = 240\,000 \text{ рублей};$$

третья фирма должна уплатить

$$\frac{10}{15+12+10} \cdot 740\,000 = 200\,000 \text{ рублей}.$$

Ответ: 300 000 рублей; 240 000 рублей; 200 000 рублей

3 Процентное изменение величины.

Пример 1.

В сентябре 1 кг винограда стоил 80 рублей. В октябре виноград подорожал на 10%. Сколько рублей стоил 1 кг винограда после подорожания в октябре?

Решение:

1 кг винограда подорожал в октябре на $0,1 \cdot 80 = 8$ рублей. $80 = 8$ рублей. Значит цена 1 кг винограда в октябре составила $80 + 8 = 88$ руб.

Краткая запись решения: $80(1 + 0,1) = 88$ руб.

Пример 2.

Налог на доходы составляет 13% от заработной платы. После удержания налога на доходы Татьяна Николаевна получила 9570 рублей. Сколько рублей составляет заработная плата Татьяны Николаевны?

Решение:

1-й способ.

Пусть заработная плата составляет x рублей. Тогда согласно условия задачи составим уравнение

$$x - 0,13 \cdot x = 9570$$

$$x(1 - 0,13) = 9570$$

$$x = \frac{9570}{1 - 0,13}$$

$$x = 11\,000$$

2-й способ.

Примем заработную плату Татьяны Николаевны в x рублей за 100%. Тогда Татьяна Николаевна после удержания налога получает на руки 9570 рублей, которые составляют $100 - 13 = 87(\%)$.

Составим пропорцию и решим ее:

$$\begin{array}{l}
 x - 100\% \\
 9570 - 87\% \\
 \hline
 \frac{x}{9570} = \frac{100}{87} \\
 x = \frac{9570 \cdot 100}{87} = 11\,000
 \end{array}$$

Ответ: 11 000 рублей.

4 Проценты и соотношения между величинами.

В некоторых задачах величины связаны формулой и необходимо ответить на вопрос, как процентное изменение одних величин влияет на процентное изменение других величин.

Пример 1. За некоторый период времени у господина Иванова количество акций увеличилось на 15%. На сколько процентов увеличилась общая стоимость акций господина Иванова, если цена каждой акции увеличилась на 20%?

Решение. Пусть S_0 – цена одной акции, n – количество акций, $S_0 \cdot n$ – общая стоимость акций. Эти величины связаны формулой $S = S_0 \cdot n$.

Составим таблицу:

	Цена одной акции	Количество акций	Общая стоимость
Было	S_0	n	$S_0 \cdot n$
Стало	$1,2S_0$	$1,15n$	$1,38S_0 \cdot n$

Можно сразу сделать вывод: общая стоимость акций S увеличилась в 1,38 раз, поэтому стоимость акций увеличилась на 38%.

Или, используя формулу процентного «прироста», находим искомую величину:

$$\frac{1,38 S_0 n - S_0 n}{S_0 n} \cdot 100 = 38(\%).$$

Ответ: 38%.

Пример 2. Производительность труда рабочего при выполнении определенной работы увеличилась на 25%. На сколько процентов сократилось время для выполнения этой работы?

Решение. Пусть A – объем работы, N – производительность труда рабочего, t – время работы. Время

$$t = \frac{A}{N}.$$

работы определяется t . Составим таблицу:

	Работа	Производительность	Время
Было	A	N	$\frac{A}{N}$
Стало	A	$1,25N$	$\frac{A}{1,25N} = 0,8 \cdot \frac{A}{N}$

Можно сразу сделать вывод: новое время работы составило 80% от старого времени, следовательно, оно сократилось на 20%.

Или, используя формулу процентного «прироста», находим искомую величину:

$$\frac{\frac{A}{N} - 0,8 \cdot \frac{A}{N}}{\frac{A}{N}} \cdot 100 = 20(\%).$$

Ответ: 20%.

5 Формула простых процентов

В зависимости от способа начисления процентов (от выбора базы начисления) выделяют два основных вида процентов: *простые* и *сложные*.

Если величина A через равные промежутки времени t_1 имеет процентный прирост p только на первоначальное значение A_0 , то в момент времени $t_n = nt_1$ её значение A_n будет равно:

$$A_n = A_0 \left(1 + \frac{pn}{100} \right) \text{ — формула простых процентов.}$$

Пример 1. Занятия ребенка в музыкальной школе родители оплачивают в Сбербанке, внося ежемесячно 250 рублей. Оплата должна производиться до 15-го числа каждого месяца, после чего за каждый просроченный день начисляется пеня в размере 4% от суммы оплаты занятий за один месяц. Сколько денег придется заплатить родителям, если они просрочат оплату на неделю?

Решение. Так как по условию задачи $A_0 = 250$, $p = 4$, $n = 7$, то по формуле простых процентов находим

$$\text{искомую величину } A_7 = 250 \left(1 + \frac{4 \cdot 7}{100} \right) = 320(\text{руб.}).$$

Ответ: 320 рублей.

6. Задачи на растворы, смеси, сплавы

Чтобы лучше понимать условия данных задач, необходимо знать следующие понятия:

- 1) *Что такое концентрация вещества в растворе, смеси, сплаве?* Концентрация вещества в растворе (смеси, сплаве) – это отношение массы или объема вещества к массе или объему всего раствора (смеси, сплава). Как правило, концентрация выражается в процентах.
- 2) *Что такое процент?* Процент – это сотая доля числа. Она может выражаться либо в виде десятичной дроби, либо в виде процента.
- 3) *Что такое масса раствора, смеси, сплава?* Масса раствора (смеси, сплава) равна сумме масс всех составляющих. При смешивании нескольких растворов (смесей, сплавов) масса нового раствора становится равной сумме всех смешанных растворов. Масса растворенного вещества при смешивании двух растворов суммируется.

Задачи на смеси и сплавы бывают двух основных видов:

1. Две смеси определенной массы с некоторой концентрацией вещества сливают вместе. Нужно определить массу и концентрацию этого вещества в новой смеси.
2. В некоторый раствор, с некоторой концентрацией вещества, добавляют, например, чистую воду (с нулевой концентрацией этого вещества). Нужно определить, какой стала концентрация вещества.

Пример 1.. Первый сплав содержит 10% меди, второй – 40% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 3 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 30% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

В этой задаче примем за x массу первого сплава и выразим через него второй и третий.

	Масса сплава	Процентное содержание вещества	Масса вещества
Первый сплав	x	$10\%=0,1$	$0,1 x$
Второй сплав	$x + 3$	$40\%=0,4$	$0,4 (x+3)$
Третий сплав	$2x+3$	$30\%=0,3$	$0,3 (2x+3)$

(результат слияния первых двух)			
---------------------------------------	--	--	--

Составим и решим уравнение:

$$0,1x + 0,4(x+3) = 0,3(2x+3)$$

$$0,1x + 0,4x + 1,2 = 0,6x + 0,9$$

$$0,3 = 0,1x$$

$$x = 3 \text{ (кг) масса первого сплава.}$$

$$2 \cdot 3 + 3 = 9 \text{ (кг) масса третьего сплава.}$$

Ответ: масса третьего сплава 9 кг.

Пример 2. Смешав 60%-й и 30%-й растворы кислоты и добавив 5 кг чистой воды, получили 20%-й раствор кислоты. Если бы вместо 5 кг воды добавили 5 кг 90%-го раствора той же кислоты, то получили бы 70%-й раствор кислоты. Сколько килограммов 60%-го раствора использовали для получения смеси?

Для решения этой задачи будем составлять две краткие записи. До слов "если бы вместо 5кг воды..." и после. Примем за x массу первого раствора, а за y – массу второго.

	Масса раствора	Процентное содержание вещества	Масса вещества
Первый раствор	x	$60\% = 0,6$	$0,6x$
Второй раствор	y	$30\% = 0,3$	$0,3y$
Вода	5	0	0
Третий раствор (результат слияния первых двух)	$x+y+5$	$20\% = 0,2$	$0,2(x+y+5)$

Составим уравнение с двумя переменными: $0,6x + 0,3y + 0 = 0,2(x+y+5)$

	Масса раствора	Процентное содержание вещества	Масса вещества
Первый раствор	x	60%=0,6	0,6 x
Второй раствор	y	30%=0,3	0,3y
Раствор	5	90%=0,9	4,5
Третий раствор (результат слияния первых двух)	x+y+5	70%=0,7	0,7 (x+y+5)

Составим уравнение с двумя переменными: $0,6x + 0,3y + 4,5 = 0,7(x+y+5)$

Объединив полученные два уравнения в систему и решив ее, получим x. Это и будет сколько килограммов 60%-го раствора использовали для получения смеси. Ответ: 2 кг.

Выводы:

Задачи с экономическим содержанием являются практическими задачами. А их решение, бесспорно, способствует более качественному усвоению содержания курса математики средней школы, позволяет осуществлять перенос полученных знаний и умений в экономику, что в свою очередь, активизирует интерес к задачам прикладного характера и изучению математики в целом. Такие задачи позволяют наиболее полно реализовывать прикладную направленность в обучении и способствуют более качественному усвоению самого учебного материала и формированию умения решать задачи данного типа. В процессе формирования финансовой грамотности используются, в том числе, и задания из вариантов ЕГЭ и ОГЭ. Это повышает мотивационный аспект обучения.